Ιόνιο Πανεπιστήμιο – Τμήμα Πληροφορικής

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

2024-25

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

(αριθμητικές πράξεις)

https://mixstef.github.io/courses/csintro/

Μ.Στεφανιδάκης

Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

- Ο υπολογιστής μπορεί να εκτελέσει
  - Λογικές πράξεις (το είδαμε στην προηγούμενη ενότητα)
  - Αριθμητικές πράξεις
- Υπενθύμιση: στις μονάδες επεξεργασίας
  - Οι πράξεις εκτελούνται σε ομάδες bits (bytes ή πολλαπλάσιά τους)

Σειρές από bits ως δυαδικοί αριθμοί

128	64	32	16	8	4	2	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
bit 7	bit 6	bit 5	bit 4	bit 3	bit 2	bit 1	bit 0

το περισσότερο σημαντικό bit

το λιγότερο σημαντικό bit

1	1	1	1	0	0	1	1
1x128	1x64	1x32	1x16	0x8	0x4	1x2	1x1

128 + 64 + 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 =

243 (δεκαδικό)

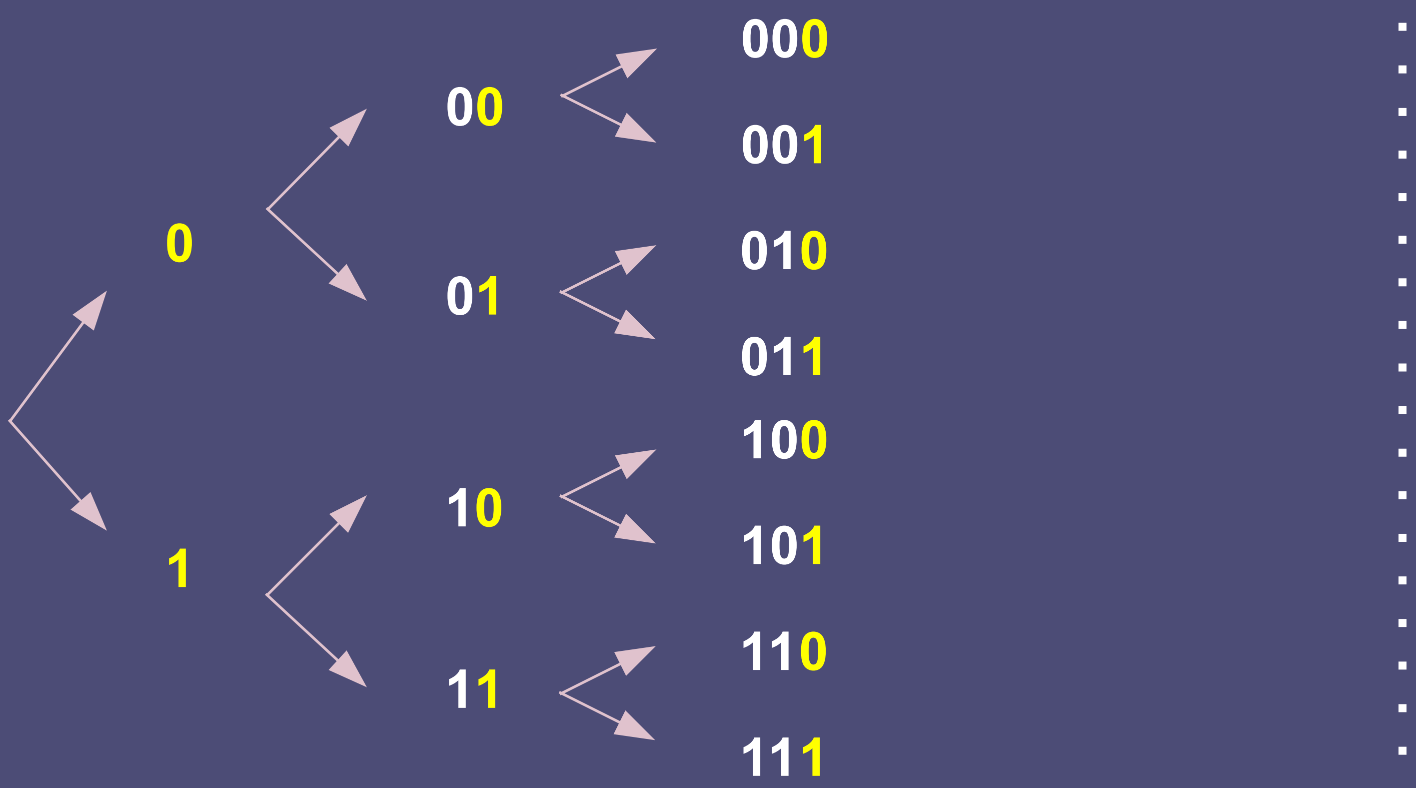
- Μετατροπή από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα
  - Εάν ο αριθμός διαθέτει περισσότερα bits, χρησιμοποιούμε μεγαλύτερες δυνάμεις του 2 στο αριστερό μέρος

Μετατροπή δεκαδικού σε δυαδικό

243 (δεκαδικό) = 11110011

Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί με *n* bits;

με 1 bit:	με 2 bits:	με 3 bits:	με *n* bits:
2 αριθμοί (=2^1)	4 αριθμοί (=2^2)	8 αριθμοί (=2^3)	2^n αριθμοί



Δυαδικοί αριθμοί χωρίς πρόσημο (φυσικοί)

- Για αναπαράσταση διαφορετικών «πραγμάτων»
  - Ως μοναδικοί αναγνωριστικοί αριθμοί
  - Συχνά χωρίς αριθμητική έννοια
  - Παραδείγματα
    - Οι ξεχωριστές διευθύνσεις μνήμης
    - Οι χαρακτήρες σε ένα αλφάβητο
- Ξανά: με *n* bits απαριθμούνται έως και 2^n *διαφορετικά «πράγματα»*

Φυσικοί αριθμοί (χωρίς πρόσημο)

0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
.....	...

Με κίτρινο φαίνεται ο ελάχιστος αριθμός bits που απαιτείται για την αναπαράσταση του αντίστοιχου αριθμού

- Με *n* bits περιγράφονται
  - Οι φυσικοί αριθμοί από *0* έως και 2^n*-1*

Δεκαεξαδικό Σύστημα

- 16 ψηφία
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
  - Αντιστοιχία με τους δεκαδικούς 0 έως 15
- Σε δυνάμεις του 16
  - $16^n \ldots 16^4\ 16^3\ 16^2\ 16^1\ 16^0$
  - Π.χ. 16F(hex) = $1 \text{x} 16^2 + 6 \text{x} 16^1 + 15 \text{x} 16^0$
  - = 256 + 96 + 15 = 367 (δεκαδικό)
- Χρήσιμο μόνο ως «συντομογραφία» δυαδικών αριθμών

Δεκαεξαδικό Σύστημα

- Κάθε 4 δυαδικά ψηφία αντιστοιχούν σε ένα δεκαεξαδικό ψηφίο

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Παράδειγμα στο δεκαεξαδικό σύστημα

- Παράδειγμα: 1100100110010100

1100 1001 1001 0100

C 9 9 4 = C994(hex)

- Παράδειγμα: 10000101011110

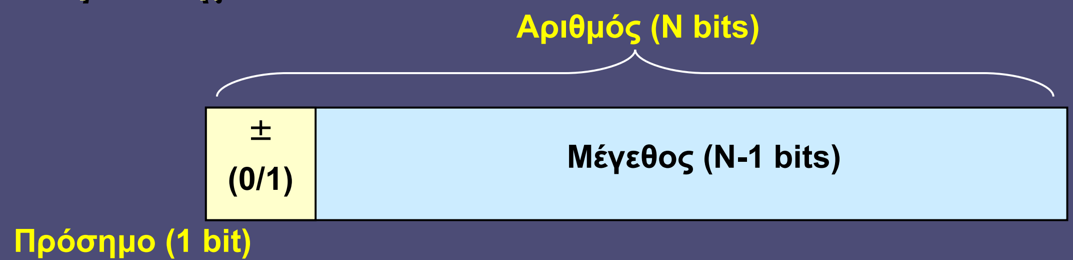
0010 0001 0101 1110

2 1 5 E = 215E (hex)

  - Συμπλήρωση με 0 στα αριστερά για να έχουμε 4άδες
  - Δεν αλλάζει τον αριθμό, όπως ακριβώς και στο δεκαδικό σύστημα

Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο – signed)

- Πώς θα αναπαρασταθούν οι αρνητικοί;
  - Για να γίνονται εύκολα οι πράξεις
- Χρησιμοποιήθηκε παλαιότερα:
  - Ξεχωριστό bit πρόσημου



  - Διάστημα τιμών για αριθμούς με *n* bits

$-(2^{n-1}-1)$ *έως* $+(2^{n-1}-1)$ (π.χ. για n=8, –127 ... +127)

    - ένα χρήσιμο bit λιγότερο
    - δυσκολία στις πράξεις
    - 2 αναπαραστάσεις του 0

Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο – signed)

- Μια ακόμα μορφή που δεν χρησιμοποιείται σήμερα:
  - Συμπλήρωμα ως προς 1
    - Αντιστροφή όλων των bits του θετικού αριθμού για να πάρουμε τον αρνητικό
    - Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
  - Διάστημα τιμών για αριθμούς με *n* bits

$-(2^{n-1}-1)$ έως $+(2^{n-1}-1)$ (γιατί;)

  - Τα ίδια προβλήματα με την χρήση ξεχωριστού bit πρόσημου

Ακέραιοι αριθμοί (με πρόσημο – signed)

- Η μορφή που χρησιμοποιεί το υλικό (hardware) σήμερα
  - Κάθε αρνητικός αριθμός είναι το «συμπλήρωμα ως προς 2» του αντίστοιχου θετικού
- Συμπλήρωμα ως προς 2
  - Τι σημαίνει «συμπλήρωμα ως προς 2»;
  - Πώς υπολογίζεται;

Συμπλήρωμα ως προς 2

- Ίσο με το «συμπλήρωμα ως προς 1» + 1
- Εμπειρικός κανόνας:
  - Αντιστροφή όλων των bits εκτός από τα δεξιότερα συνεχόμενα 0 και το πρώτο 1 αριστερά από αυτά
- Συμπλήρωμα ως προς 2: παραδείγματα

001011100 ⇒ 110100100

011111111 ⇒ 100000001

- Προσοχή στο 0000...00 και στο 1000...00

Ακέραιοι σε συμπλήρωμα ως προς 2

- Διάστημα τιμών για αριθμούς με *n* bits
  $-(2^{n-1})$ *έως* $+(2^{n-1}-1)$ (π.χ. για n=8, –128 ... +127)
  - Υπάρχει μια ασυμμετρία: το $+(2^{n-1})$ δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με *n* bits
- Ευκολία στις πράξεις
  - Το ίδιο κύκλωμα προσθέτει αριθμούς με και χωρίς πρόσημο
  - Αφαίρεση = πρόσθεση του συμπληρώματος ως προς 2
  - Μία και μοναδική αναπαράσταση του 0
- Πιο σημαντικό bit: 0 για θετικούς, 1 για αρνητικούς
  - Δεν είναι όμως bit προσήμου!

Μετατροπές ακεραίων δυαδικών σε δεκαδικό

- Γνωρίζουμε να μετατρέπουμε δυαδικούς χωρίς πρόσημο σε δεκαδικούς
  - Είδαμε π.χ. ότι το 11110011 = $2^7+2^6+2^5+2^4+2^1+2^0$ = 128+64+32+16+2+1 = 243 (δεκαδικός)
- Τι συμβαίνει όταν ο δυαδικός αριθμός έχει πρόσημο;

Μετατροπές ακεραίων δυαδικών σε δεκαδικό

- Εξετάζουμε το περισσότερο σημαντικό (αριστερότερο) bit
  - Αν είναι 0 → ο αριθμός είναι θετικός: μετατρέπουμε σε δεκαδικό όπως στους αριθμούς χωρίς πρόσημο
    - Π.χ. ο αριθμός 01101100 είναι θετικός = $2^6+2^5+2^3+2^2$ = +108
  - Αν είναι 1 → ο αριθμός είναι αρνητικός: πρώτα συμπληρώνουμε ως προς 2 για να βρούμε τον αντίστοιχο θετικό
    - Π.χ. ο 11110011 είναι αρνητικός, με θετικό τον 00001101= $2^3+2^2+2^0$ = +13
    - Άρα ο ζητούμενος αρνητικός (11110011) είναι ο -13

Ζητήματα αναπαράστασης

- Προσοχή: η σειρά bits 11110011 έχει διαφορετική σημασία ανάλογα με την επιλεγμένη αναπαράσταση
  - Αν το 11110011 αναπαριστά αριθμό χωρίς πρόσημο τότε πρόκειται για τον δεκαδικό 243 (φυσικός αριθμός)
  - Αν το 11110011 αναπαριστά αριθμό με πρόσημο τότε πρόκειται για τον δεκαδικό -13 (ακέραιος αριθμός)

- Συνεπώς δεν μπορούμε να ξέρουμε με τι ισούται μια σειρά από bits παρά μόνο αν γνωρίζουμε την αναπαράσταση που ισχύει!

Επέκταση προσήμου

- Συχνά στους υπολογιστές υπάρχει ανάγκη να γράψουμε έναν δυαδικό αριθμό με μεγαλύτερο αριθμό bits απ'όσα έχει
  - Αν πρόκειται για αριθμό χωρίς πρόσημο, αρκεί να συμπληρώσουμε με 0 έως τον απαιτούμενο αριθμό bits
    - Π.χ. για να επεκτείνουμε τον 8-bit αριθμό 01101100 στα 16 bits θα προσθέσουμε στα αριστερά 8 μηδενικά: 0000000001101100
- Αν όμως ο δυαδικός αριθμός έχει πρόσημο και είναι αρνητικός, η προσθήκη μηδενικών αλλοιώνει τον αριθμό
  - Π.χ. το 0000000011110011 δεν είναι το -13 (έγινε θετικός!)

Επέκταση προσήμου

- Όταν ο αριθμός έχει πρόσημο (θετικός ή αρνητικός) συμπληρώνουμε τα bits που λείπουν με το πιο σημαντικό (αριστερότερο) bit του αρχικού αριθμού
  - 01101100 → 0000000001101100
  - 11110011 → 1111111111110011
  - Η λειτουργία αυτή ονομάζεται επέκταση προσήμου

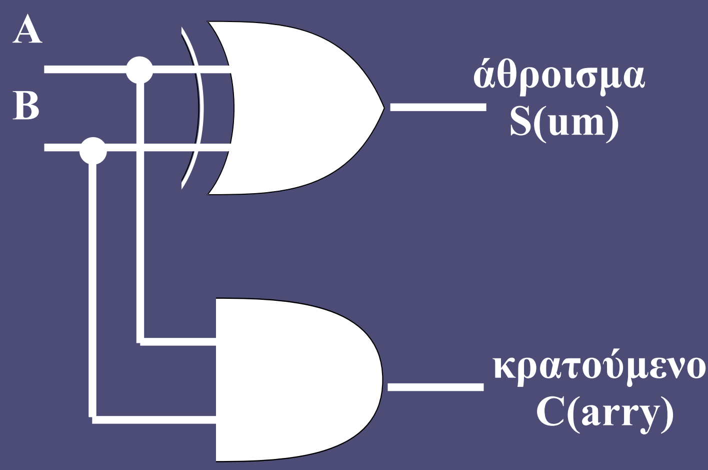
Αριθμητικές πράξεις

- Οι βασικές πράξεις
  - Πρόσθεση
  - Αφαίρεση
- Άλλες πράξεις
  - Πολλαπλασιασμός
  - Διαίρεση
  - Επίσης:
    - Τετραγωνική ρίζα, τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εκθετικά, λογάριθμοι κλπ..
    - Υλοποίηση σε υλικό με διάφορες τεχνικές
      - Π.χ με πολυώνυμα

Προσθέτοντας 2 bits

bits	άθροισμα	κρατούμενο
0 + 0	0	0
0 + 1	1	0
1 + 0	1	0
1 + 1	0	1

Ημιαθροιστής (half-adder)



A	B	s	c
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- Πώς γίνεται η πρόσθεση αριθμών με περισσότερα bits;

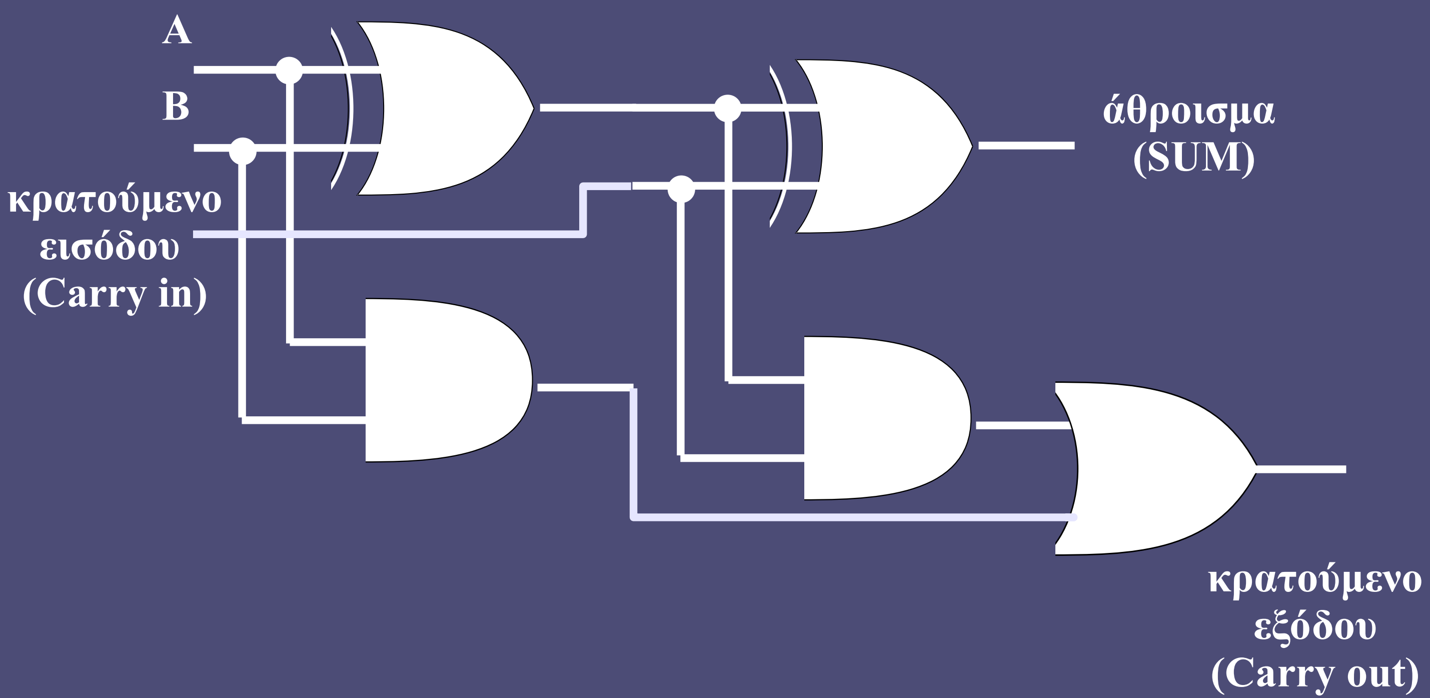
Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(χωρίς πρόσημο)

Κρατούμενο		1	1	1				
Α’ Αριθμός (119)	0	1	1	1	0	1	1	1
Β’ Αριθμός (88)	0	1	0	1	1	0	0	0
Άθροισμα (207)	1	1	0	0	1	1	1	1

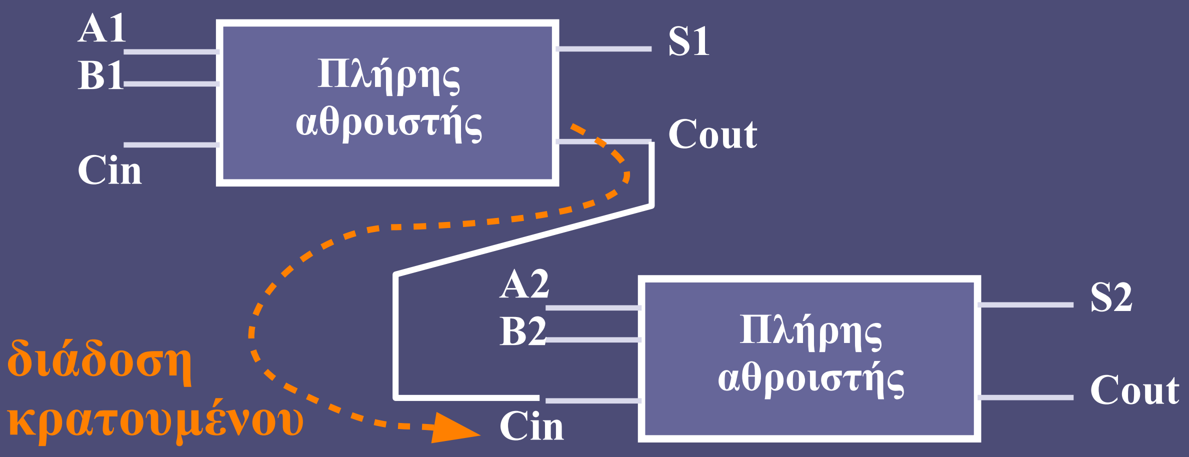
1. Αριθμοί με ίδιο μήκος (ίσος αριθμός bits)
2. Αρχίζοντας από το λιγότερο σημαντικό bit (το δεξιότερο)
3. Προσθέτουμε ζεύγη bits και μεταφέρουμε το κρατούμενο (αν υπάρχει) προς τα αριστερά
   - Το προσθέτουμε στο επόμενο ζεύγος bits

Πλήρης αθροιστής (full-adder)

- Μία από τις πιθανές υλοποιήσεις
  - με δύο ημιαθροιστές



Πρόσθεση αριθμών με πλήρεις αθροιστές



- Πολλαπλά τμήματα πλήρους αθροιστή
  - Όμως: πόσο γρήγορα διαδίδεται το κρατούμενο; (ripple carry)
  - Τεχνικές πρόβλεψης κρατουμένου (carry look-ahead)

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(χωρίς πρόσημο)

- Υπερχείλιση (overflow)
  - Στον υπολογιστή το πλήθος των bits ανά αριθμό είναι προκαθορισμένο
  - Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης θα πρέπει να χωρά στα διαθέσιμα bits (π.χ. σε έναν καταχωρητή)
  - Αν όχι, έχουμε υπερχείλιση
- Αριθμοί χωρίς πρόσημο:
  - Αριθμός με N bits → πεδίο τιμών [0 ... 2^N - 1]
    - Π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από 0 έως 255

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(χωρίς πρόσημο)

Κρατούμενο		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**		
Α’ Αριθμός (180)		**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
Β’ Αριθμός (78)		**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
Άθροισμα (258)	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

διαθέσιμος χώρος

ύπαρξη τελικού κρατουμένου = υπερχείλιση

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(με πρόσημο)

- Ακέραιοι (με πρόσημο)
  - Οι αρνητικοί αριθμοί είναι σε συμπλήρωμα ως προς 2
    - Το περισσότερο σημαντικό bit υποδηλώνει το πρόσημο
    - 0=θετικός, 1=αρνητικός
  - Αριθμός με N bits $\Rightarrow$ πεδίο τιμών [-2^{N-1} ...0... $+2^{N-1} - 1$]
    - π.χ. για αριθμούς με 8 bits, από -128 έως +127
- Πρόσθεση
  - Όπως ακριβώς με τους αριθμούς χωρίς πρόσημο
  - Αλλά: το τελικό κρατούμενο αγνοείται
    - Δεν είναι ένδειξη υπερχείλισης

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(με πρόσημο)

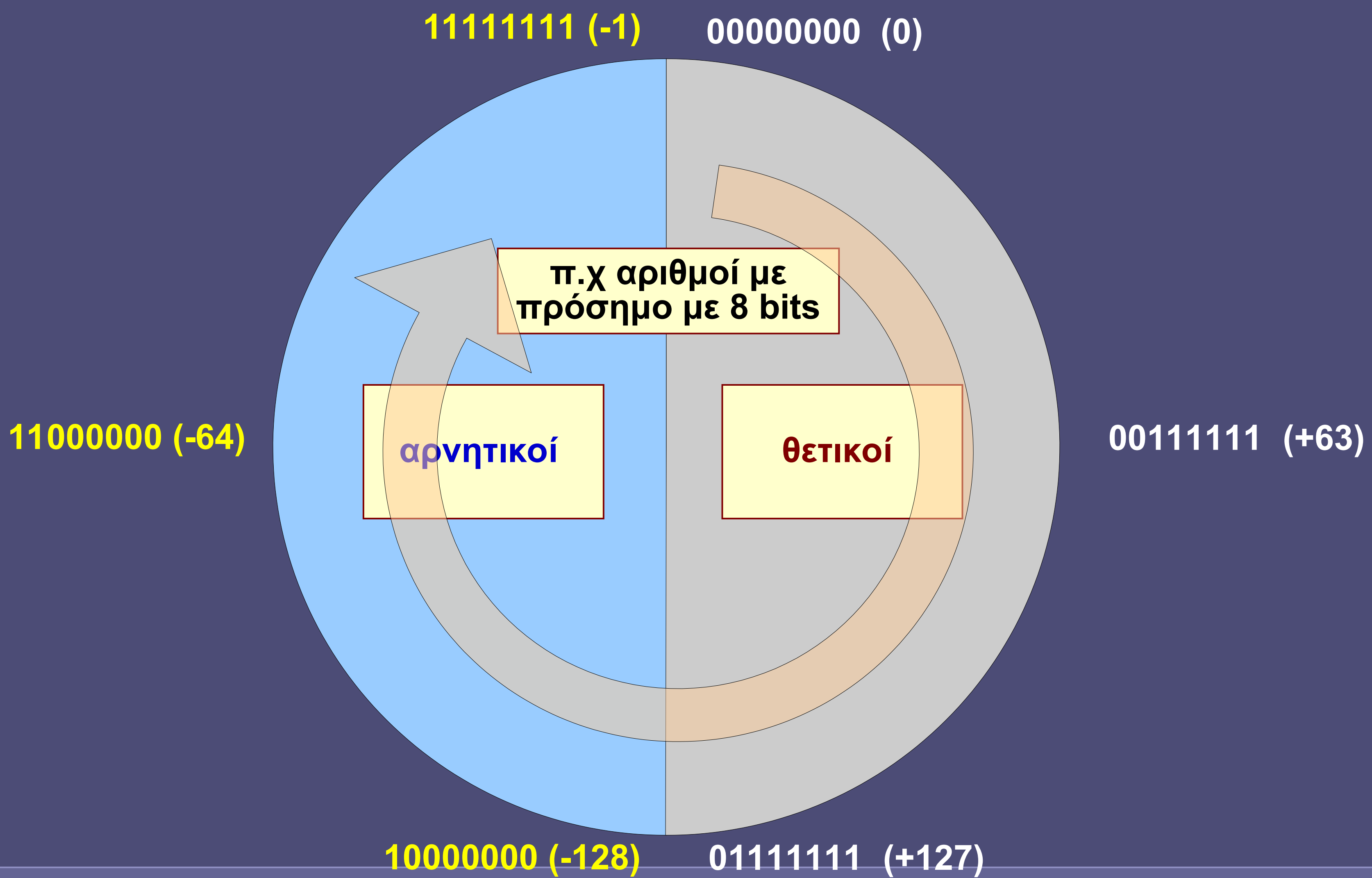
Κρατούμενο				**1**				
Α' Αριθμός (+17)	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
Β' Αριθμός (+22)	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
Άθροισμα (+39)	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Προσθέτοντας δυαδικούς αριθμούς
(με πρόσημο)

Κρατούμενο	1	1	1	1	1			
Α' Αριθμός (+24)	0	0	0	1	1	0	0	0
Β' Αριθμός (-17)	1	1	1	0	1	1	1	1
Άθροισμα (+7)	0	0	0	0	0	1	1	1

- το κρατούμενο αγνοείται

Υπερχείλιση σε αριθμούς με πρόσημο



Υπερχείλιση σε αριθμούς με πρόσημο

Κρατούμενο		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
Α’ Αριθμός (+127)	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
Β’ Αριθμός (+3)	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
Άθροισμα (-126;)	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο
  - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση

Υπερχείλιση σε αριθμούς με πρόσημο

Κρατούμενο	~~1~~						1	
Α' Αριθμός (-126)	1	0	0	0	0	0	1	0
Β' Αριθμός (-5)	1	1	1	1	1	0	1	0
Άθροισμα (+124;)	0	1	1	1	1	1	0	0

- Το άθροισμα αριθμών με ίδιο πρόσημο θα πρέπει να έχει επίσης το ίδιο πρόσημο
  - στην αντίθετη περίπτωση: υπερχείλιση

Κλασματικοί αριθμοί

- Θεωρητικά
  - Θα μπορούσαμε να επεξεργαζόμαστε ξεχωριστά το ακέραιο και το κλασματικό μέρος
- Αλλά
  - Αδυναμία αναπαράστασης πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αριθμών
- Η λύση
  - Αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating point)
  - Εύκολη αναπαράσταση τόσο του 1.000.000.000.000 όσο και του 0,0000000000000001
  - Προσοχή: οι αριθμοί κινητής υποδιαστολής είναι προσεγγιστικοί
    - Η αναπαράσταση κάποιων αριθμών είναι «στο περίπου»

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής

- 3 μέρη
  - Πρόσημο (Π) (1 bit)
    - 0 = +   1 = -
  - Εκθέτης (Ε) (8 ή 11 bits)
    - Η βάση είναι το 2 (εννοείται)
    - Θετικοί και αρνητικοί εκθέτες με πλεόνασμα 127 ή 1023 (π.χ. αντί -55, Ε= -55+127 = 72!)
  - Σημαινόμενο τμήμα (Σ) (23 ή 52 bits)
    - Κανονικοποίηση: μορφή 1,xxxxxxxxxxxx…
    - Το ‘1,’ εννοείται και δεν αποθηκεύεται
- Τελικός αριθμός: $-1^{\Pi} \times 1.\Sigma \times 2^{E-127}$ (ή 2^{E-1023})
  - Ειδικοί αριθμοί: 0, ∞, NaN (Not a Number)
- Στις εφαρμογές AI χρησιμοποιούνται και μορφές με λιγότερα bits σε εκθέτη και σημαινόμενο τμήμα

Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

- Σύνθετη διαδικασία
- Η γενική μορφή της πρόσθεσης:
  1. Σύγκριση προσήμων
     - αν είναι ίδια ⇒ πρόσθεση
     - αλλιώς ⇒ αφαίρεση
  2. Εξίσωση εκθετών
     - μετακίνηση υποδιαστολής
  3. Πρόσθεση ή αφαίρεση σημαινόμενων τμημάτων
     - ακέραιο και κλασματικό μέρος
  4. Κανονικοποίηση αποτελέσματος
  5. Έλεγχος για υπερχείλιση

Πράξεις με αριθμούς κινητής υποδιαστολής

132

Α' αριθμός: 0 10000100 10110000000000000000000

$+ \quad 2^{132-127} \times 1{,}1011 \qquad (+2^5 \times 1{,}1011)$

130

Β' αριθμός: 0 10000010 01100000000000000000000

$+ \quad 2^{130-127} \times 1{,}011 \quad (+2^3 \times 1{,}011)$

Α	$+2^5$	x	1,10110
+ Β	$+2^5$	x	0,01011
=	$+2^5$	x	10,00001
κανονικοποίηση	$+2^6$	x	1,000001

αποτέλεσμα: 0 10000101 00000100000000000000000

133